Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Développements :

Algorithme du gradient à pas optimal [Bernis], Action à gauche.

Bibliographie :

Grifone, Rombaldi, Rombaldi Analyse matricielle, Ciarlet, Filbet.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte, et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité). Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski , en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

Remarque 1. *K est un corps, $A \in M_{m,n}(K)$, on cherche à résoudre $AX = b$ où $b \in M_{m,1}(K)$.*

1 Théorie générale des systèmes linéaires

1.1 Définitions

Définition 2 (Gri p141). *Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution. Le rang du système est le rang de A.*

Proposition 3 (Gri p141). *Système compatible si et seulement si $b \in \overrightarrow{C_1, ..C_n}$.*

Définition 4 (Romb analyse matricielle p148). *[Filbet p13] Conditionnement.*

Proposition 5 (Romb an mat p148). *Liens avec les systèmes perturbés.*

1.2 Systèmes de Cramer

Définition 6 (Gri p142). *[Romb p546] Système de Cramer si $A \in GL_n(K)$.*

Remarque 7 (Romb p546). *[Gri p142] Unique solution donnée par $A^{-1}b$.*

Proposition 8 (Romb p546). *[Gri p143] Description des x_k en fonction des déterminants. (Formules de Cramer).*

Remarque 9 (Romb p546). *De l'ordre de $n^2n!$ opérations élémentaires à effectuer.*

Exemple 10 (Gri p144). *Exemple de résolution.*

1.3 Cas général : Théorème de Rouché-Fontené

Remarque 11 (Gri p146). *Soit $A \in M_{m,n}(K)$ et $r \in \{1, ..., \min(m, n)\}$ le rang du système. Quitte à permuter et renuméroter les équations, on peut supposer que $(A)_{i,j\in\{1,..,r\}}$ est inversible.*

Définition 12 (Gri p146). *Déterminant caractéristique.*

Théorème 13 (Gri p146). *Théorème de Rouché-Fontené. Les solutions forment un espace affine de dimension $n - r$, dépendant des paramètres $(x_{r+1}, ...x_n)$.*

Exemple 14 (Gri p147). *Exemple de résolution.*

Remarque 15 (Gri p148). *Si $b = 0$ alors le système est toujours compatible.*

Proposition 16 (Gri p148). *L'ensemble des solutions est un ev de dim $n-r$ où r est le rang du système.*

2 Sur les opérations élémentaires

2.1 Définitions

Définition 17 (H2G2 2017 p230). *[Romb Analyse matricielle p186] Matrices de dilation, transvection, permutation.*

Proposition 18 (H2G2 2017 p230). *Tableaux des opérations à droite et à gauche.*

Proposition 19 (Romb analyse matricielle p185). *Inverse de $D(a) = D(1/a)$, de $T(a) = T(-a)$ et de $P_{i,j} = P_{j,i}$.*

Proposition 20 (Romb p135). *[Romb analyse matricielle p188] Les transvections engendrent $SL_n(K)$. Les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(K)$.*

Application 21 (Romb analyse matricielle p188). *Les ensembles $GL_n(\mathbb{R})^+$ et $GL_n(\mathbb{R})^-$ sont connexes par arcs et ce sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Remarque 22 (Romb analyse matricielle p189). *En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes (permutations et combinaisons linéaires de lignes), l'ensemble des solutions ne changent pas.*

2.2 Algorithme du pivot de Gauss

Proposition 23 (Ciarlet p76). *Soit $A \in M_n(K)$. Il existe $M \in GL_n(K)$, produit de transvections et de dilatations telles que $T = MA$ soit triangulaire supérieure.*

Remarque 24 (Cia p73). *Méthode de résolution.*

Remarque 25 (Cia p73). *On calcule MA et Mb et non pas M.*

Application 26 (Cia p73). *Algorithme du pivot de Gauss avec A inversible.*

Remarque 27. *Complexité en n^3.*

Remarque 28. *La résolution d'un système triangulaire coûte n^2.*

Application 29 (H2G2 2017 p23). *Applications de l'algorithme de Gauss : calcul du rang, résolution de systèmes linéaires et réduction à la forme échelonnée, calcul de l'inverse d'une matrice, recherche d'un système d'équations d'un sev défini par une famille génératrice, recherche d'une base d'un sev défini par un système d'équations.*

2.3 En terme d'actions de groupe

Remarque 30 (H2G2 2017 p203). *Cadre : Etudier les orbites de l'action de $GL_m(K)$ sur $M_{m,n}(K)$ par multiplication à gauche.*

Définition 31 (H2G2 2017 p204). *Pivot, matrice échelonnée en lignes, matrice réduite.*

Exemple 32 (H2G2 2017 p204). *Exemple d'une telle matrice.*

Proposition 33 (H2G2 2017 p209). *Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau.*

Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes.

Exemple 34 (MPSI Delaunay). *Inverse d'une matrice.*

3 Résolution effective des systèmes linéaires

3.1 Méthodes directes

Remarque 35. *Cadre :Solution exacte en un nombre fini d'étapes.*

Décomposition LU

Proposition 36 (Romb analyse matricielle p195). *[Romb p683]*

Une matrice inversible possède une décomposition LU si et seulement si tous les mineurs principaux sont non nuls. (Si on ne suppose pas inversible, mettre un alors (Cia p84)).

Application 37 (Romb analyse matricielle p195). *Le système équivaut à deux systèmes triangulaires.*

Décomposition QR

Théorème 38 (Cia p92). *Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, A est produit d'une matrice unitaire et d'une matrice triangulaire supérieure.*

Remarque 39. *On peut l'obtenir par l'algorithme de Gram-Schmidt.*

Décomposition de Choleski

Théorème 40 (Cia p87). *Si A est symétrique définie positive, il existe B triangulaire inférieure telle que $A = BB^t$.*

Exemple 41 (Gri p364). *Exemple de décomposition.*

3.2 Méthodes itératives

Remarque 42 (Romb analyse matricielle p199). *But : Construire une suite d'éléments qui converge vers la solution du système.*

Définition 43 (Romb analyse matricielle p199). *Méthode itérative convergente.*

Théorème 44 (Romb analyse matricielle p199). *Convergence en fonction du rayon spectral.*

Exemple 45 (Romb an mat p201). *Méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = M - A$.*

Méthode de Gauss-Seidel : M le triangle inférieur de A, $N = M - A$.

Méthode de relaxation : M et N en fonction d'un paramètre ω.

Proposition 46 (Bernis). *Méthode du gradient à pas optimal.*